

Fractales: descubriendo patrones infinitos



Taller de Talento Matemático de Navarra
Nafarroako Matematika-Talentu Tailerra

Pamplona, 16 de octubre de 2026

¿Qué es la geometría?
¿Cuántas dimensiones conoces?
¿Qué dimensión tiene la frontera de un país?

¡Hoy intentaremos contestar estas preguntas!

El juego del caos

Material necesario

- Folio
- Regla
- Compás
- Lápiz o bolígrafo
- Dado

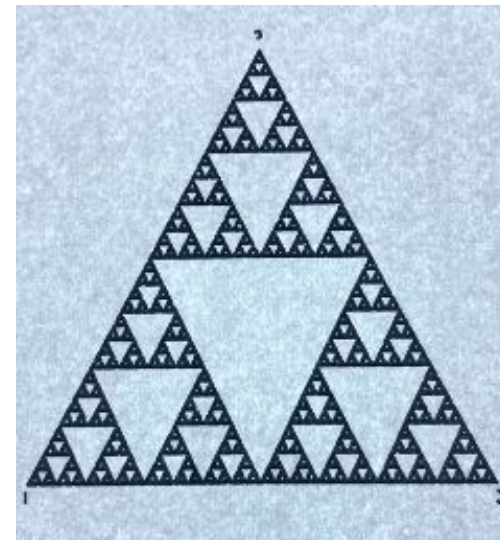
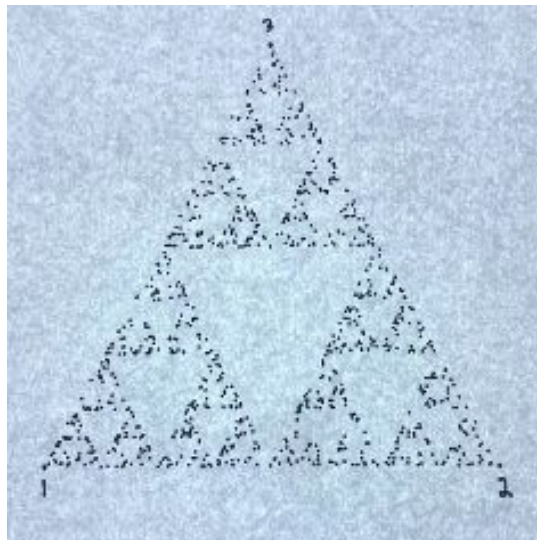
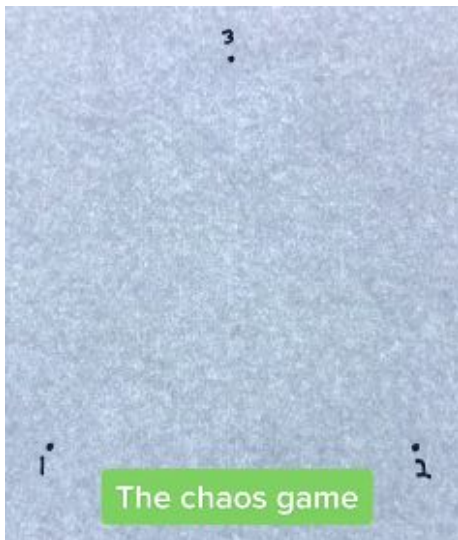
El juego del caos

1. Dibuja un triángulo equilátero.
2. Nombra los vértices con A, B y C.
3. Elige un punto del interior del triángulo con el que empezar.
4. Lanza un dado. Si obtienes:
 - 1 o 2: pon la regla uniendo tu punto con el punto A y dibuja marca la mitad de ese segmento.
 - 3 o 4: mismo procedimiento con B
 - 5 o 6: mismo procedimiento con C
5. A partir del punto dibujado, repite el proceso muchas veces (infinitas)

10 minutos

¿Qué has obtenido?

El juego del caos



[Vídeo](#)

El triángulo de Sierpinski

- Paso 0.1: Dibuja un triángulo equilátero de lado $L \rightarrow$ Triángulo inicial
 - Calcula su perímetro en función del lado L (P_0)
 - El área inicial es A_0
- Paso 0.2: Dibuja el triángulo medial del inicial (une los puntos medios de cada lado).
 - Deja ese triángulo vacío y colorea los otros tres.
- Paso 1: Conjunto 1
 - Calcula el perímetro del conjunto (P_1) en función del lado inicial: L .
 - Calcula el área total (A_1). Al área total puedes quitar el área del medial.
 - Pon el área en función de A_0

El triángulo de Sierpinski

- Paso 3.1: Dibuja el triángulo medial de los triángulos coloreados
- Paso 3.2: Conjunto 2
 - Calcula el perímetro del conjunto (P_2)
 - Calcula el área total (A_2) en función de A_0 .
- Sigue repitiendo el proceso varias veces → iteración
 - Calcula el perímetro (P_n) y el área total (A_n) de cada paso en función del lado inicial (L) y el área inicial (A_0)

El triángulo de Serpinski

¿Qué pasa con el perímetro?

¿Puedes encontrar alguna recurrencia, algún patrón?

¿Y con el área?

El triángulo de Sierpinski

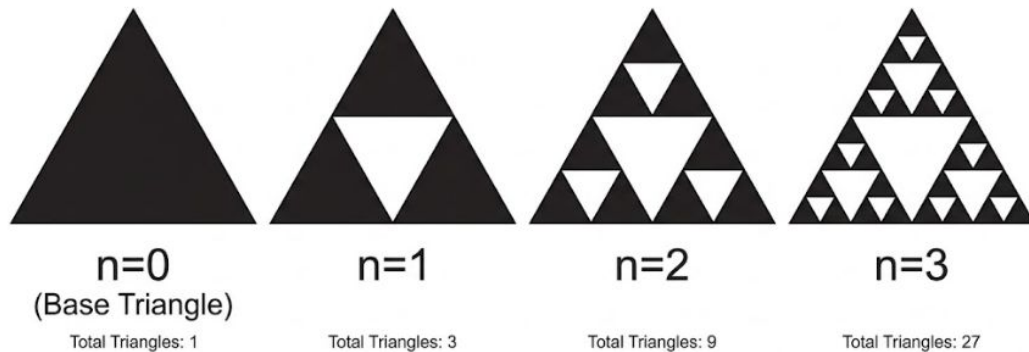
- Aquí encontrarás una [Simulación con Geogebra](#) del Triángulo de Sierpinski



- Y dos vídeo donde se van viendo las diferentes iteraciones.



El triángulo de Sierpinski



Iteración (n)	Perímetro total (P_n)	Área total (A_n)
0	$3L \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0$	$A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0$
1	$3L \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1$	$A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$
2	$3L \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$

El triángulo de Serpinski

- Vamos a darles valores concretos para ver qué pasa con el perímetro y el área total.
- Si $L = 1$

Iteración	Perímetro total	Área total
0	$3L \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0$	$A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0$
1		
2		
3		
10		
100		
1000		

El triángulo de Sierpinski

- Cuantas más iteraciones se hacen ($n \rightarrow \infty$)
 - ¿Qué pasa con el área del triángulo de Sierpinski?
 - ¿Y con el perímetro?

El triángulo de Sierpinski

- Cuantas más iteraciones se hacen ($n \rightarrow \infty$)
 - ¿Qué pasa con el área del triángulo de Sierpinski?
 - El área del triángulo tiende a cero cuantas más iteraciones se hacen.

$$A_n = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

- ¿Y con el perímetro?
 - El perímetro tiende a infinito.

$$P_n = 3 \cdot L \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Inciso - Logaritmos

- Para entender mejor los puntos que vienen a continuación, hace falta conocer el concepto de Logaritmo.
- El logaritmo es el número al que hay que elevar la base para obtener el argumento.

$$2^3 = 8 \quad \text{OPERACIONES INVERSAS} \quad \log_2(8) = 3$$

- Si no pone ninguna base, se presupone que es 10.
- Logaritmo neperiano (ln) la base es el número e.

El triángulo de Serpinski - Dimensión

¿Qué dimensión tiene este triángulo tan especial?

Dimensión fractal

- La dimensión se puede calcular con la siguiente fórmula
 - N: es el número de copias
 - r: es el factor de ampliación/reducción
 - D es la dimensión fractal

$$N = r^D$$

- Despejando D se obtiene la dimensión

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

Dimensión fractal - triángulo de Sierpinski

- ¿Cuál es la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski?
 - N : es el número de copias
 - r : es el factor de ampliación/reducción

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

Dimensión fractal - triángulo de Sierpinski

- ¿Cuál es la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

- N: es el número de copias
- r: es el factor de ampliación/reducción

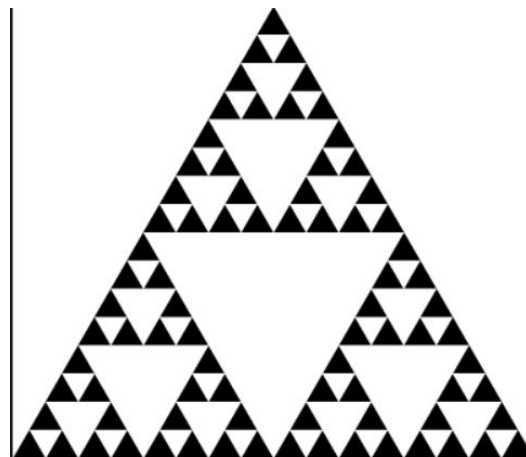
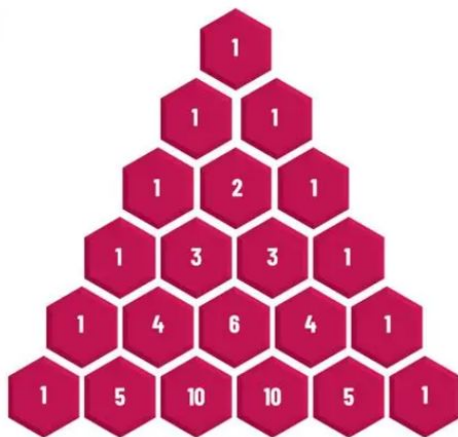
$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D \approx 1,585$$

- La dimensión está entre 1 y 2
 - Es más que 1, porque el fractal ocupa más espacio que una línea.
 - Es menos que 2, porque no llega a rellenar completamente una superficie.

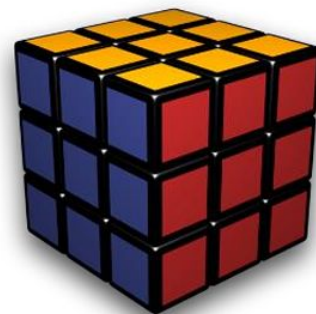
Triángulo de Serpinski y Pascal

- A continuación, tenéis unos enlaces que relacionan el Triángulo de Pascal y Serpinsky
 - [Relación con el triángulo de Pascal – Fractales](#)
 - [Colour the odd numbers. A fractal appears](#)



Esponja de Menger

- La esponja de Menger es un fractal muy particular que se ideó en el siglo XX. Vamos a ver los pasos necesarios para construirlo.
- PASO 0. Partiremos inicialmente de un cubo.
- PASO 1: Este cubo se divide en 27 cubos iguales. ¿Lo visualizas? Viene a tener la misma pinta que el famoso cubo de Rubik.
- PASO 2: Eliminamos los cubitos centrales de cada cara y el cubito central del cubo.

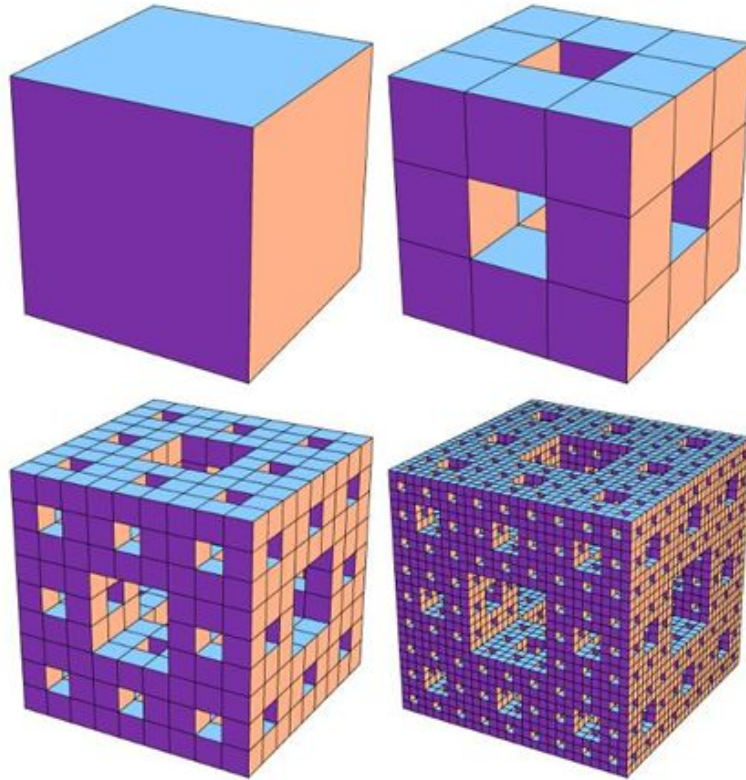


Actividad obtenida de www.maths4everything.com/15fdfe_6938b0461dae4ce0a1b1eda8a96dc4d5.pdf

Esponja de Menger

- Llegados a este punto, tenemos una esponja de Menger de nivel 1.
- Para construir una esponja de nivel 2 lo que debemos hacer es repetir los pasos anteriores con cada uno de los cubitos que tenemos en la figura final del nivel 1. Y así sucesivamente.
- ¿Hasta cuándo? **Pues hasta el infinito y más allá.**
- De hecho, la esponja de Menger es la figura que nos quedaría tras repetir el proceso hasta el infinito.

Esponja de Menger



El copo de Koch

- Paso 0: Dibuja un triángulo equilátero de lado L
 - Calcula el perímetro inicial $\rightarrow P_0$
- Paso 1
 - Divide cada segmento en 3 partes iguales
 - Sobre la parte central construye un triángulo equilátero y elimina la base.
 - Calcula el perímetro del conjunto $\rightarrow P_1$
- Paso 2: Sobre cada uno de los segmentos resultantes, vuelve a realizar el paso 1.
 - Calcula el perímetro del conjunto $\rightarrow P_2$

El copo de Koch

- Cuantas más iteraciones se hacen ($n \rightarrow \infty$)
 - ¿Qué pasa con el perímetro del copo de Koch?



- ¿Y con el área?

El copo de Koch

- Cuantas más iteraciones se hacen ($n \rightarrow \infty$)
 - ¿Qué pasa con el perímetro del copo de Koch?
 - El perímetro tiende a infinito



$$P_n = 3L \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

- ¿Y con el área?
 - El área es finita

¿¿¿Un perímetro infinito encierra un área finita!!??



¿Cuál será la dimensión fractal del copo de Koch?

Dimensión fractal - Copo de Koch

- ¿Cuál es la dimensión fractal del copo de Koch?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

- N: es el número de copias
- r: es el factor de ampliación/reducción

Dimensión fractal - Copo de Koch

- ¿Cuál es la dimensión fractal del copo de Koch?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

- N: es el número de copias
- r: es el factor de ampliación/reducción

$$D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.2619$$

- La dimensión está entre 1 y 2
 - Es más que 1, porque el fractal ocupa más espacio que una línea.
 - Es menos que 2, porque no llega a rellenar completamente una superficie.

Copo de Koch

- Aquí encontrarás una [Simulación con Geogebra](#) del Copo de Koch

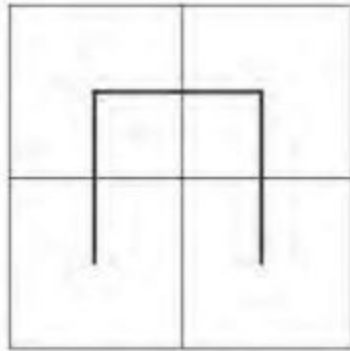


- Y un [vídeo](#) donde se van viendo las diferentes iteraciones.

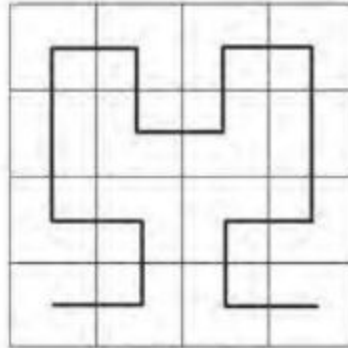


Curva de Peano

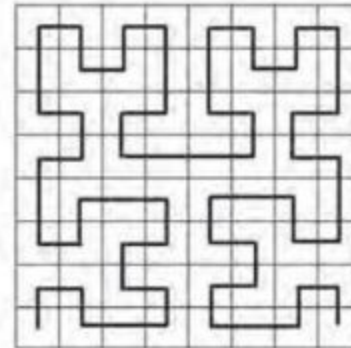
- ¿Qué dimensión fractal tendrá?



Paso 1



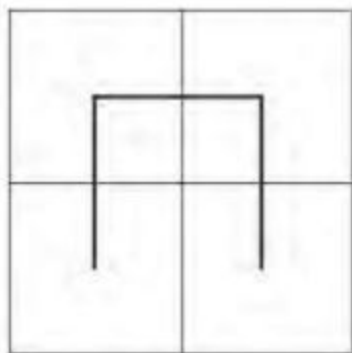
Paso 2



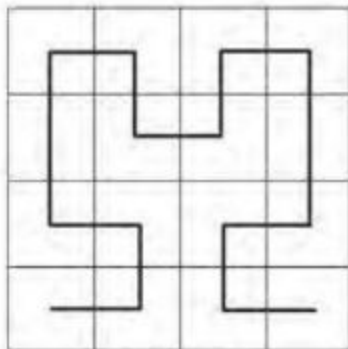
Paso 3

Curva de Peano

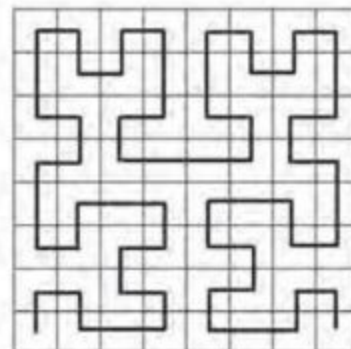
- ¿Qué dimensión fractal tendrá?



Paso 1



Paso 2

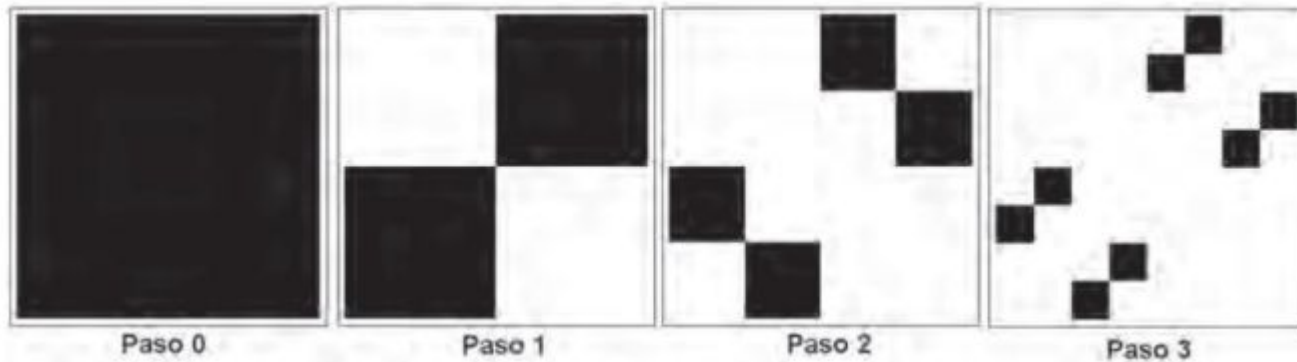


Paso 3

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

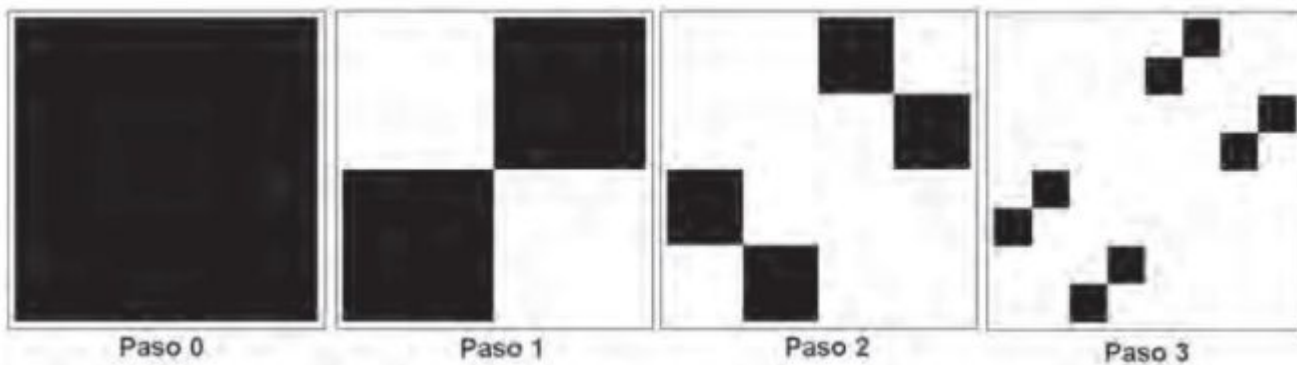
Conjunto de Besikovitch

- ¿Qué dimensión fractal tendrá?



Conjunto de Besikovitch

- ¿Qué dimensión fractal tendrá?



Conjunto de Besikovitch:

El conjunto se divide en $n=2$ partes semejantes al total de razón $r = 1/2$, por lo que

$$D = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$$

Conjunto de Mandelbrot

- Este conjunto se define en el plano complejo fijando un número complejo c cualquiera. A partir de c , se construye una sucesión por recursión:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \in \mathbb{C} & (\text{término inicial}) \\ z_{n+1} = z_n^2 + c & (\text{sucesión recursiva}) \end{cases}$$

- Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que c pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido.

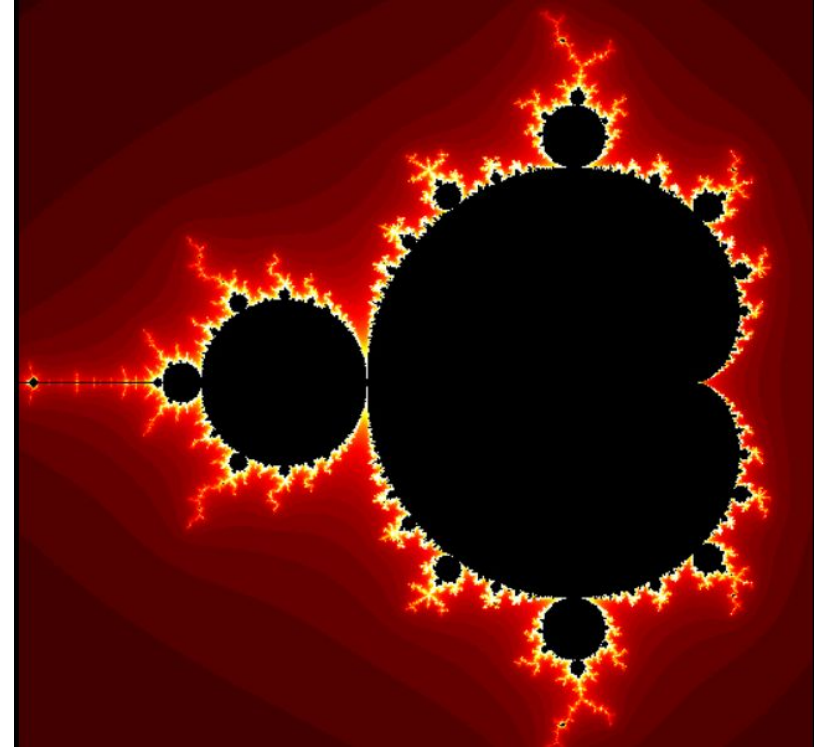
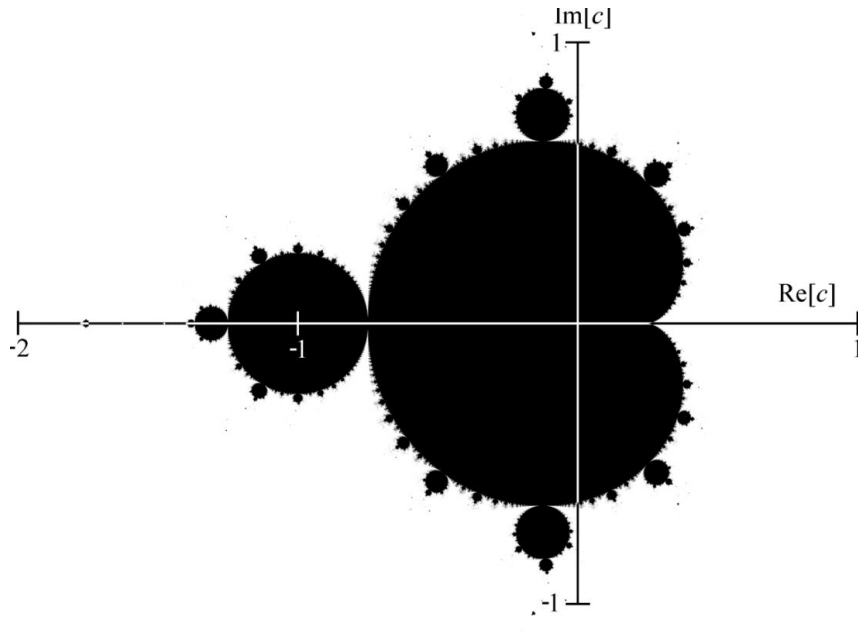
Conjunto de Mandelbrot

- Ejemplos

$$\begin{cases} z_0 = 0 \in \mathbb{C} & \text{(término inicial)} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c & \text{(sucesión recursiva)} \end{cases}$$

- si $c = 1$ obtenemos la sucesión $0, 1, 2, 5, 26, \dots$, que diverge.
 - Como no está acotada, 1 no es un elemento del conjunto de Mandelbrot.
- si $c = -1$ obtenemos la sucesión $0, -1, 0, -1, \dots$, que sí es acotada
 - la sucesión está acotada, por tanto, -1 sí pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Conjunto de Mandelbrot



Definición de fractal - Mandelbrot

- Mandelbrot (1977) en su obra “The Fractal Geometry of Nature”
 1. Figuras que se repiten a sí mismas infinitas veces a distintas escalas (conjuntos autosemejantes).
 2. Figuras con dimensión no entera (dimensión fractal).
 3. Conjuntos que aparecen tras procesos iterativos infinitos.

Definición de fractal - Falconer

- Falconer (1990)
 - Presenta **irregularidades** a cualquier escala: independientemente de la escala elegida, el nivel de detalle de un fractal siempre es el mismo,
 - La **geometría euclídea es insuficiente** para describirlo
 - **Autosemejante**
 - La dimensión fractal es estrictamente mayor que la dimensión topológica
 - Se define mediante un **algoritmo recursivo**

Dimensión fractal de elementos conocidos

- La dimensión se puede calcular con la siguiente fórmula
 - N: es el número de copias
 - r: es el factor de ampliación/reducción
 - D es la dimensión fractal

$$N = r^D$$

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

- Segmento
 - Si dividimos un segmento en n partes iguales, ¿cuál es su dimensión fractal?

Dimensión fractal - segmento

- Segmento
 - Si dividimos un segmento en N partes iguales, ¿cuál es su dimensión fractal?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{1/N}\right)} = \frac{\log(N)}{\log(N)} = 1$$

Dimensión fractal - cuadrado

- Cuadrado
 - Si dividimos un cuadrado en N partes iguales, ¿cuál es su dimensión fractal?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

Dimensión fractal - cuadrado

- Cuadrado
 - Si dividimos un cuadrado en N partes iguales, ¿cuál es su dimensión fractal?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{N}} = N^{-1/2}$$

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{N^{-1/2}}\right)} = \frac{\log(N)}{\log(N^{1/2})} = \frac{\log(N)}{\frac{1}{2}\log(N)} = 2$$

Dimensión fractal - cubo

- Cubo
 - Si dividimos un cubo en N partes iguales, ¿cuál es su dimensión fractal?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

Dimensión fractal - cubo

- Cubo
 - Si dividimos un cubo en N partes iguales, ¿cuál es su dimensión fractal?

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

$$r = \frac{1}{N^{1/3}} = N^{-1/3}$$

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log(N)}{\log\left(N^{1/3}\right)} = \frac{\log(N)}{\frac{1}{3}\log(N)} = 3$$

La geometría fractal es consistente con la geometría euclídea.

¿Para qué sirven los fractales?

El estudio de los fractales ha ayudado enormemente a explicar fenómenos de nuestro universo como, por ejemplo:

1. La formación de nubes y el funcionamiento de los huracanes
2. El curso de los ríos y la medición de las costas
3. El crecimiento de las plantas
4. El nacimiento de los planetas y la evolución de las galaxias
5. El crecimiento de la población
6. El ruido electrónico
7. Los terremotos y volcanes



Dimensión fractal - frontera de un país

- La **ley de potencia de Richardson** relaciona el tamaño del instrumento de medición con la longitud total medida.
- Richardson descubrió empíricamente que la longitud medida de una frontera o costa no es una constante, es una función de la longitud o regla utilizada para medirla.
 - r : Tamaño de la regla o paso de medición (ej. 100 km, 1 km...)
 - K : Constante positiva de proporcionalidad propia de la frontera.
 - D : Dimensión fractal de la línea

$$L(r) = K \cdot r^{1-D}$$

Frontera de un país

- ¿Cuál será la dimensión de la frontera entre España y Francia?
 - Dependerá la regla con la que se mida (r)
- Si la frontera entre España y Francia tiene $D = 1.10$

$$L(r) = K \cdot r^{1-1.10} = K \cdot r^{-0.10} = \frac{K}{r^{0.10}}$$

- Conforme la regla r se hace más pequeña ($r \rightarrow 0$), el término en r se hace más grande.
- Por lo tanto, la longitud medida $L(r)$ aumenta indefinidamente ($L \rightarrow \infty$).

Frontera de un país

- ¿Cuál será la dimensión de la frontera entre España y Francia?

$$L(r) = K \cdot r^{1-1.10} = K \cdot r^{-0.10} = \frac{K}{r^{0.10}}$$

r	L(r)	Explicación
100 km		
1 km		
1 m		
1 cm		

Frontera de un país

- ¿Cuál será la dimensión de la frontera entre España y Francia?

$$L(r) = K \cdot r^{1-1.10} = K \cdot r^{-0.10} = \frac{K}{r^{0.10}}$$

r	L(r)	Explicación
100 km		Ignora los valles y picos pequeños de los Pirineos
1 km		Captura la sinuosidad de barrancos y contornos de ríos
1 m		Mide alrededor de cada roca y saliente rocoso.
1 cm		Rodea las imperfecciones de los granos de cuarzo en la piedra.

DIGITAL BY NATURE

Die Kunst von Miguel Chevalier | 12.9.2025 – 1.3.2026

On Tour: Museum de Fundatie, Zwolle, NL | 3.10.2026 – 4.4.2027

Enlace web

Taller de Talento Matemático de Navarra

Fractales y arte

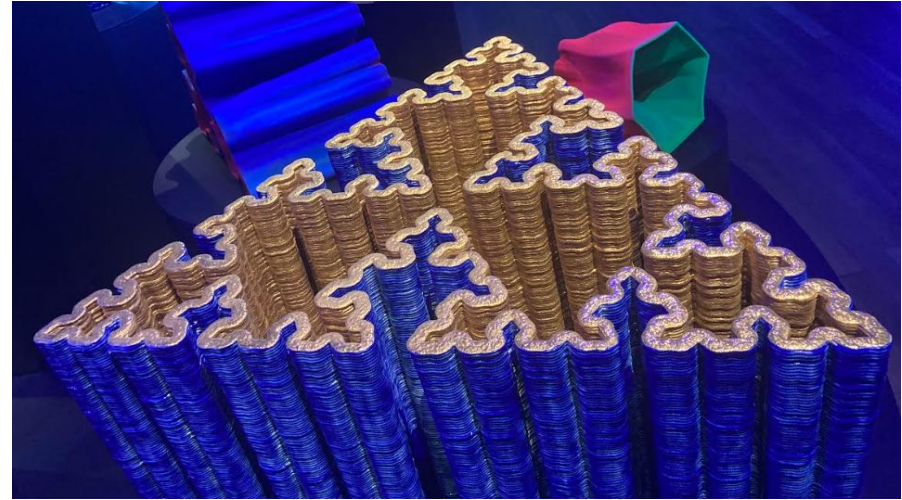
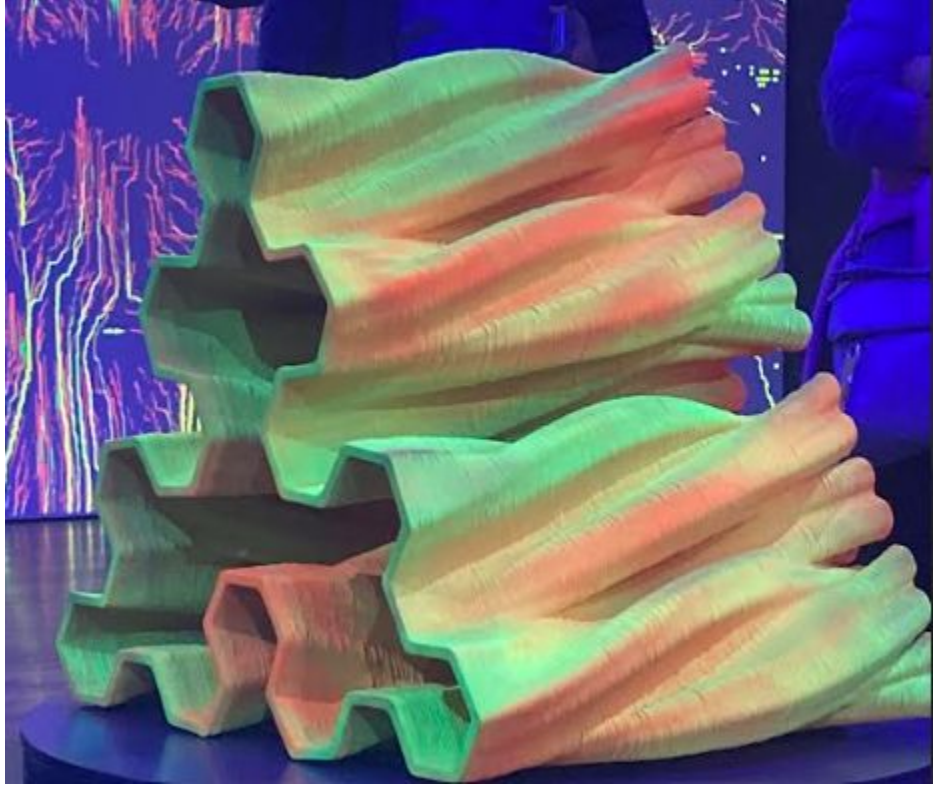


María Arive Beroiz

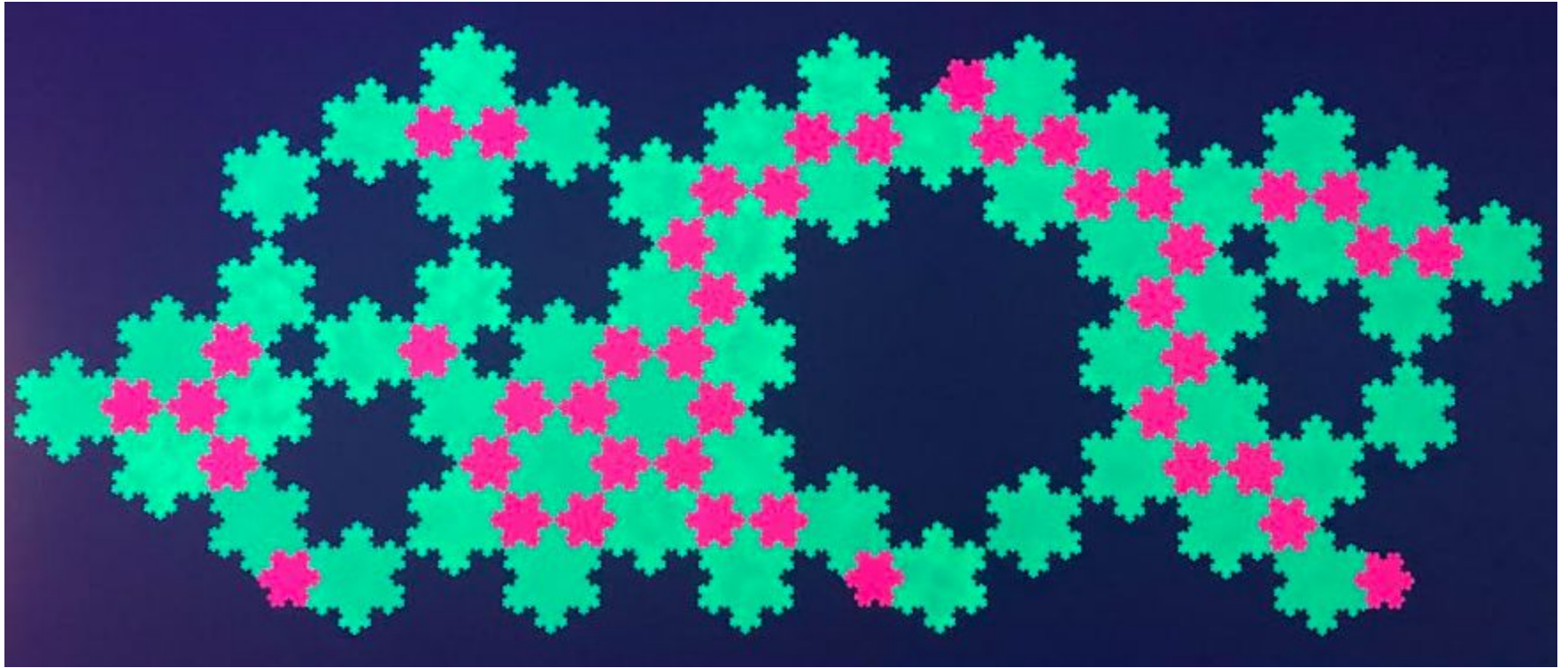


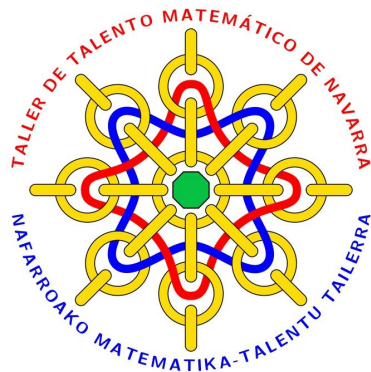
Taller de Talento Matemático de Navarra

Fractales y arte



Fractales y arte





¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

`mariveberol@educacion.navarra.es`